

## עבודת חופש י"א 5 יחידות

יש להגיש את העבודה בשבוע הראשון של הלימודים.

יש לעשות רק את התרגילים המסומנים.

בהצלחה וחופש נעים

אנה ונטלי

חשב: (סדר פעולות החשבון עם חזקות)

$$\begin{array}{lll} (2+3)^2 - 6^2 & (15) & -4^2 - (-2)^3 & (14) & 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3^2 & (13) \\ (-2)^5 : (-2^2 + 3)^8 & (18) & 3 \cdot (-2^4) + 2 \cdot (-5)^2 & (17) & (4 \cdot 2)^2 - 5 \cdot 2^3 & (16) \\ (-4)^2 + 4^3 : (-2^2) & (21) & 5 \cdot (-3)^2 - 6^2 : (-3^2) & (20) & (3^2 - 5^2) : (-2)^4 & (19) \end{array}$$

חוקי החזקות

$(a \neq 0)$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (2)	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (1)	הנוסחאות:
--------------	---------------------------------	-------------------------------	-----------

חשב: (פשט את הביטויים הבאים)

$$\begin{array}{lll} a^2 b^8 b^7 a^9 b & (24) & a^5 b^3 a^8 b^7 & (23) & a \cdot a^6 \cdot a^4 \cdot a^9 & (22) \\ \frac{a^3 a^4 a}{a^2 a^6} & (27) & \frac{a^3 a^6 a}{a^4 a^4} & (26) & \frac{a^4 a^3}{a^5 a} & (25) \\ \frac{a^2 b^3 c^5 a^8 b^5 c^6}{a^5 c^2 b^6 a^2 c^8} & (30) & \frac{a^2 b^6 a^7 b^9}{a^3 a^4 b^{10} b^5} & (29) & \frac{a^5 b^2 a^5 b^7}{a^6 b^3 b^4} & (28) \end{array}$$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (3)	הנוסחה:
-------------------------------	---------

$$\begin{array}{lll} (c^5 c)^3 (c^2 c^4)^2 & (33) & (b^4 b^6)^2 (b^3 b)^4 & (32) & (a^3)^4 \cdot (a^5)^2 & (31) \\ \frac{(a^2)^3 (a^4)^5}{(a^3)^4 a^4 a^5} & (36) & \frac{(b^7)^7}{(b^6)^4 (b^3)^8} & (35) & \frac{(a^7)^5}{(a^8)^4} & (34) \end{array}$$

$(b \neq 0)$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (5)	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (4)	הנוסחאות:
--------------	--	-------------------------------------	-----------

$$\begin{array}{lll} (a^8 b)^2 & (39) & (a^3 b^5)^4 & (38) & (ab)^7 & (37) \\ \left(\frac{a^7}{b^8}\right)^2 & (42) & \left(\frac{a^2}{b^4}\right)^5 & (41) & \left(\frac{a}{b}\right)^3 & (40) \\ \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^5 \left(\frac{1}{b^3}\right)^3 \frac{(a^2)^{10}}{b} & (45) & \frac{(a(b^3)^2)^3 (a^2 b^4)^5}{a^7 (b^8)^4 a^2 b} & (44) & \frac{(a^4 b^3)^3 a^6 a^2}{(b^4 a)^2 (a^3)^6} & (43) \end{array}$$



## חוקי החזקות – כל הנוסחאות

מצא ללא מחשבון איזה מספר גדול יותר, המספר מימין או המספר משמאל:

$4^{1000}$	$15^{500}$ (48)	$32^{180}$	$8^{300}$ (47)	$27^{201}$	$81^{150}$ (46)
$30^{240}$	$8^{400}$ (51)	$7 \cdot 36^{50}$	$6^{101}$ (50)	$11^{600}$	$5^{900}$ (49)
$\left(\frac{1}{36}\right)^{50}$	$\frac{7}{6^{101}}$ (54)	$\left(\frac{1}{4}\right)^{26}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ (53)	$65^{101}$	$2^{600}$ (52)
$(-125)^{200}$	$(-25)^{300}$ (57)	$0.12^{30}$	$0.5^{90}$ (56)	$\frac{4}{125^{167}}$	$\left(\frac{1}{25}\right)^{250}$ (55)
$\left(-\frac{4}{9}\right)^{75}$	$\left(-\frac{8}{27}\right)^{49}$ (60)	$(-4)^{25}$	$(-2)^{50}$ (59)	$-9^{300}$	$-27^{202}$ (58)

חשב את הערך המספרי של הביטויים הבאים (n מספר טבעי):

$$\frac{3^{n+2} - 3^n}{3^{n+1} + 3^n} \quad (62)$$

$$\frac{5^{n+1}(5^n - 2^n)}{25^n - 10^n} \quad (64)$$

$$\frac{9^n - 5 \cdot 6^n + 6 \cdot 4^n}{9(3^{n-1} - 2^n)(3^n - 2^{n+1})} \quad (66)$$

$$\frac{2^{n+1} + 2^{n+3}}{2^{n+2}} \quad (61)$$

$$\frac{2^{n+3} - 20}{2^{n+1} - 5} \quad (63)$$

$$\frac{(2^{2n+1} - 4)(4^{n+1} + 4)}{16^n - 4^n - 2} \quad (65)$$

היטות (חזקות עם מעריך טבעי):

-81 (10)	.64 (8)	-.64 (7)	.512 (6)	.343 (5)	.125 (4)	.256 (3)	.27 (2)	1 (1)
-.1 (19)	.32 (18)	.2 (17)	-.11 (15)	-.8 (14)	.6 (13)	-.625 (12)	216 (11)	1 (10)
$a^4 b^2$ (28)	.1 (27)	.a (25)	$a^{11} b^{16}$ (24)	$a^{13} b^{10}$ (23)	$a^{20}$ (22)	-.80 (21)	$a^3 b^2 c$ (30)	$a^4 b^3 c^2$ (29)
$a^7 b^7$ (37)	$a^5$ (36)	.b (35)	$c^{30}$ (33)	$b^{36}$ (32)	$a^{22}$ (31)	$a^3 b^2 c$ (30)	$a^4 b^3 c^2$ (29)	$a^5 b^4 c^3$ (28)
> (46)	.1 (45)	$a^4 b^5$ (44)	.b (43)	$\frac{a^{10}}{b^{20}}$ (41)	$\frac{a^3}{b^3}$ (40)	$a^{16} b^2$ (39)	$a^{12} b^{20}$ (38)	$a^{10} b^{15}$ (37)
< (56)	< (55)	< (54)	< (53)	> (52)	< (51)	> (50)	< (49)	> (48)
$\frac{1}{3}$ (66)	.8 (65)	.5 (64)	.4 (63)	.2 (62)	$2\frac{1}{2}$ (61)	> (60)	< (59)	> (58)

## חזקות עם מעריך השווה לאפס ועם מעריך שלילי

- המעריך החזקה n היה מספר טבעי. נראה עכשיו שניתן להרחיב את מושג זה למעריך שלילי. בהמשך לחוקי החזקות.
- המעריך עם מעריך השווה לאפס ועם מעריך שלילי. שראינו נביא את ההגדרות שהן למעשה חוקי חזקות נוספים.

81 בני גורן (מתמטיקה 5 יח"ל - חלק ג' 2) \* הצילום מספר זה הוא עבירה על החוק



$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$5^{-2} \quad (12)$$

$$4^{-1} \quad (11)$$

$$3^{-2} \quad (10)$$

$$2^{-3} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \quad (16)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \quad (15)$$

$$\frac{1}{3^{-3}} \quad (14)$$

$$\frac{1}{2^{-1}} \quad (13)$$

$$0^{-5} \quad (20)$$

$$\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3} \quad (19)$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \quad (18)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \quad (17)$$

$$0.25^{-1} \quad (24)$$

$$0.1^{-3} \quad (23)$$

$$0.2^{-1} \quad (22)$$

$$0.5^{-2} \quad (21)$$

$$-5^{-2} \quad (28)$$

$$-2^{-3} \quad (27)$$

$$(-3)^{-2} \quad (26)$$

$$(-2)^{-4} \quad (25)$$

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \quad (32)$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad (31)$$

$$-(-4)^{-3} \quad (30)$$

$$-3^{-1} \quad (29)$$

חשב וכתוב את התשובה ללא קו שבר. היעזר בחזקות שליליות במידת הצורך:

$$\frac{a^{-8} \cdot a^{-7}}{a^{-9}} \quad (35)$$

$$\frac{(a^6)^3}{(a^4)^5} \quad (34)$$

$$\frac{a^4 \cdot a^3}{(a^4)^3} \quad (33)$$

$$\frac{(a^5)^{-2} (a^6)^6}{(a^{-4})^{-4} a^{13}} \quad (38)$$

$$\frac{a^{-10} \cdot a^6 \cdot a^{-4}}{a \cdot a^{-5} \cdot a^{-3}} \quad (37)$$

$$\frac{a^{-3} \cdot a^7 \cdot a^{-9}}{a^{-5} \cdot a^{-1}} \quad (36)$$

$$\frac{(a^{-5} b^3)^{-4} (a^4)^{-2}}{(a^{-2})^{-6} b^{-3} b^{-9}} \quad (41)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{b^{-1} (3b)^0}{a^{-3} b^5} \quad (40)$$

$$\frac{(a^{-3})^{-5} (a^{-4})^6}{(a^{-1})^{-9} (a^{-6})^3} \quad (39)$$

חשב (ללא מחשבון)

$$\frac{3^{-2} \cdot 3^3 + 2^{-3} \cdot 2 \cdot 2^4}{7^{-2} : 7^{-3}} \quad (43)$$

$$\frac{3^2 - 6^0 - 5^{-1} \cdot 5^0}{2^{-2} \cdot 2^1} \quad (42)$$

$$\frac{16^{-2} \cdot 8^3 + (-2)^0 - 3^{-3} \cdot 81}{6^3 \cdot 6^2} \quad (45)$$

$$\frac{8^{-3} \cdot 2^6 \cdot 2^4 - (-6)^0}{3^{-5} \cdot 3^3} \quad (44)$$

$$\left(\frac{1}{81^4}\right) \cdot \left(\frac{1}{243^{-1}}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{9^{-2}}\right)^{-3} \quad (47)$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8^{-1}}\right)^{-10} \quad (46)$$

חשב את:  $a = 10^{-15}$ ,  $b = 5 \cdot 10^{-18}$

$$\frac{b^2}{a^3} \quad .\text{א.}$$

$$\frac{3}{b} \quad .\text{ה.}$$

$$\frac{a}{4} \quad .\text{ד.}$$

$$\frac{a}{b} \quad .\text{ג.}$$

$$\frac{1}{b} \quad .\text{ב.}$$

$$2ab$$

חשב (ללא מחשבון) איזה מספר גדול יותר, המספר מימין או המספר משמאל:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-200}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-300} \quad (51)$$

$$4^{-300}$$

$$65^{-100} \quad (50)$$

$$8^{-201}$$

$$16^{-100}$$

$$-7^{-170}$$

$$(-48)^{-85} \quad (54)$$

$$(-4)^{-390}$$

$$(-3)^{-520} \quad (53)$$

$$(-3^2)^{-25}$$

$$(-3)^{-100}$$



חשב את ערכי הביטויים הבאים (n מספר טבעי):

$$\frac{5^{-n+1} - 100}{5^{-n-1} - 4} \quad (57)$$

$$\frac{2^{-n+1} \cdot 4^{n-1} + 2^n}{2^{n+3} - 2^{n-1}} \quad (56)$$

$$\frac{3^{n-1} + 3^{n-2}}{3^{n-3}} \quad (55)$$

תשובות (חזקות עם מעריך השווה לאפס ועם מעריך שלילי):

- (1) 3 (2) 1 (3) -1 (4) -1 (5) -1 (6) -1 (7)  $\frac{1}{2}$  (8) לא מוגדר (9)  $\frac{1}{8}$  (10)  $\frac{1}{9}$  (11)  $\frac{1}{25}$  (12) 2 (13) 2 (14) 27 (15) 125 (16) 1.5 (17)  $\frac{25}{9}$  (18) 0.027 (19) לא מוגדר (20)  $\frac{1}{4}$  (21) 4 (22) 5 (23) 1000 (24) 4 (25)  $\frac{1}{16}$  (26)  $\frac{1}{9}$  (27)  $-\frac{1}{8}$  (28)  $-\frac{1}{25}$  (29)  $a^{-3}$  (30)  $a^{-1}$  (31) -4 (32) 27 (33)  $a^{-5}$  (34)  $a^{-2}$  (35)  $a^{-6}$  (36) a (37)  $a^{-1}$  (38)  $a^{-3}$  (39)  $a^{-1}b^{-2}$  (40) 1 (41) 1 (42) 6 (43) 1 (44) 9 (45)  $\frac{1}{4}$  (46)  $\frac{1}{27}$  (47) 48 (48)  $10^{-32}$  (49)  $2.5 \cdot 10^{-16}$  (50)  $6 \cdot 10^{17}$  (51)  $2.5 \cdot 10^{10}$  (52) < (53) > (54) > (55) 12 (56)  $\frac{1}{5}$  (57) 25

## שורשים

### הגדרת השורש

עד כה מעריך חזקה היה מספר שלם (חיובי, אפס או שלילי). בהמשך נראה שניתן להגדיר גם מעריך חזקה בצורת שבר. מתברר שיש קשר הדוק בין מעריך חזקה בצורת שבר לבין שורשים. נחזור ונזכיר תחילה מהו השורש הריבועי של מספר ממשי:

**שורש ריבועי** – מספר b הוא שורש ריבועי של מספר ממשי a אם  $b^2 = a$   
אם  $b \geq 0$  מסמנים  $b = \sqrt{a}$  ואם  $b < 0$  מסמנים  $b = -\sqrt{a}$

באופן דומה מגדירים את השורש ה-n:

**שורש מסדר n** – אם a ו-b הם מספרים ממשיים ו-n הוא מספר טבעי כך שמתקיים  $b^n = a$  אז b הוא שורש מסדר n של a. אם n אי זוגי מסמנים  $b = \sqrt[n]{a}$ , אם n זוגי אז עבור  $b \geq 0$  מסמנים  $b = \sqrt[n]{a}$  ועבור  $b < 0$  מסמנים  $b = -\sqrt[n]{a}$ .

### הערות:

(א) הפעולה של הוצאת שורש היא הפעולה ההפוכה להעלאה בחזקה כאשר רוצים למצוא את הבסיס.

(ב) פעולת הוצאת השורש קודמת לפעולות החיבור, החיסור, הכפל והחילוק. אם יש פעולות של העלאה בחזקה והוצאת שורש או הסדר הוא משמאל לימין. הפעולה בתוך סוגריים קודמת להוצאת שורש. הפעולות בתוך השורש קודמות להוצאת השורש.



$$\begin{array}{llll}
 \sqrt[3]{216} \text{ (8)} & \sqrt[5]{243} \text{ (7)} & \sqrt[4]{625} \text{ (6)} & \sqrt[3]{64} \text{ (5)} \\
 (\sqrt[3]{8})^4 \text{ (12)} & (\sqrt{25})^3 \text{ (11)} & \sqrt{4^3} \text{ (10)} & (\sqrt{9})^3 \text{ (9)} \\
 (\sqrt[7]{128})^3 \text{ (16)} & (\sqrt[4]{81})^5 \text{ (15)} & (\sqrt[5]{32})^4 \text{ (14)} & \sqrt{100^3} \text{ (13)} \\
 \sqrt[4]{-81} \text{ (20)} & -\sqrt[4]{16} \text{ (19)} & \sqrt[5]{-32} \text{ (18)} & \sqrt[3]{-27} \text{ (17)} \\
 (\sqrt[9]{-512})^4 \text{ (24)} & (\sqrt[5]{-243})^3 \text{ (23)} & (\sqrt[3]{-343})^2 \text{ (22)} & (\sqrt[3]{-8})^5 \text{ (21)} \\
 \sqrt[6]{-8^2} \text{ (28)} & -\sqrt[6]{8^2} \text{ (27)} & (\sqrt[4]{-9})^2 \text{ (26)} & \sqrt[4]{(-9)^2} \text{ (25)}
 \end{array}$$

### חוקי השורשים

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (2)$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (1)$
הנוסחאות: <span style="margin-left: 100px;">(n טבעי, a &gt; 0, b &gt; 0)</span>	

חשב בעזרת חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \text{ (31)} & \sqrt{5} \cdot \sqrt{80} \text{ (30)} & \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} \text{ (29)} \\
 \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}} \text{ (34)} & \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} \text{ (33)} & \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \text{ (32)} \\
 \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} \text{ (37)} & \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \text{ (36)} & \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} \text{ (35)} \\
 \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} \text{ (40)} & \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} \text{ (39)} & \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{100} \text{ (38)} \\
 \sqrt[3]{3^{-2}} \cdot \sqrt[3]{24^{-1}} \text{ (43)} & \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{160^{-1}} \text{ (42)} & \frac{(\sqrt[3]{6})^{-1}}{\sqrt[3]{48^{-1}}} \text{ (41)}
 \end{array}$$

44 האם נכון החוק:  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$  ? (a > 0, b > 0). נמק.

### הכנסת גורם לתוך השורש והוצאתו

הכנס את המספר שלפני השורש לתוך השורש:

$$\begin{array}{lll}
 5\sqrt{8} \text{ (47)} & 3\sqrt{2} \text{ (46)} & 2\sqrt{5} \text{ (45)} \\
 \frac{2}{3}\sqrt{45} \text{ (50)} & \frac{\sqrt{18}}{3} \text{ (49)} & \frac{\sqrt{12}}{2} \text{ (48)} \\
 3\sqrt[4]{2} \text{ (53)} & 5\sqrt[3]{4} \text{ (52)} & 2\sqrt[3]{3} \text{ (51)}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{lll}
 243^{0.4} \quad (12) & 4^{2.5} \quad (11) & 25^{0.5} \quad (10) \\
 36^{-\frac{3}{2}} \quad (16) & 16^{-\frac{3}{4}} \quad (15) & 64^{-\frac{5}{6}} \quad (14) \\
 32^{-0.6} \quad (20) & 343^{-\frac{2}{3}} \quad (19) & 121^{-\frac{1}{2}} \quad (18) \\
 \left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (24) & \left(\frac{4}{25}\right)^{1.5} \quad (23) & \left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (22) \\
 0.008^{\frac{4}{3}} \quad (28) & 0.001^{\frac{2}{3}} \quad (27) & 0.01^{\frac{3}{2}} \quad (26) \\
 \left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{2}{5}} \quad (32) & \left(\frac{64}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (31) & \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{6}} \quad (30)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 8^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \quad (35) & 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}} \quad (34) & 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \quad (33) \\
 125^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}} \quad (38) & 8^{-\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \quad (37) & 3^{\frac{3}{4}} \cdot 27^{\frac{5}{12}} \quad (36) \\
 16^{\frac{3}{2}} : 64^{\frac{1}{3}} \quad (41) & 81 : 81^{\frac{3}{4}} \quad (40) & 25 : 25^{\frac{1}{2}} \quad (39) \\
 9^{\frac{3}{4}} : 27^{\frac{7}{6}} \quad (44) & 8^{\frac{1}{6}} : 8^{\frac{1}{2}} \quad (43) & 9^{\frac{5}{6}} : 9^{\frac{1}{3}} \quad (42)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 16^{-\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{-64} - \sqrt{0.25} \quad (47) & \sqrt[6]{64} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (46) & 27^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{-8} \quad (45) \\
 \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} - 24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \quad (50) & 81^{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{-125} + (-2)^5 \quad (49) & \sqrt[5]{-32} + \sqrt[5]{8} \quad (48)
 \end{array}$$

(כתוב את התוצאה בעזרת שורשים, כל הבסיסים הם חיוביים)

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[15]{a^3 \sqrt[6]{a^{12}}} \quad (53) & \sqrt[7]{a^2 \sqrt{a}} \quad (52) & \frac{\sqrt{ab} \sqrt{ab}}{\sqrt[8]{a^4} \sqrt{b}}
 \end{array}$$

מחשבוני איזה מספר גדול יותר, המספר מימין או המספר משמאל:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[5]{5} \quad \sqrt{2} \quad (56) & \sqrt[4]{8} \quad \sqrt{3} \quad (55) & \sqrt{3} \\
 \sqrt[9]{32} \quad \sqrt[5]{8} \quad (59) & \sqrt[6]{2} \quad \sqrt[10]{3} \quad (58) & \sqrt[3]{3}
 \end{array}$$



$$\sqrt[5]{0.001} \quad (62) \quad \sqrt[4]{\frac{1}{27}} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \quad (61) \quad \sqrt[7]{0.5} \quad 2^{-\frac{1}{6}} \quad (60)$$

חשב את  $x$  עפ"י הנתון:

$$x^{\frac{3}{2}} = 8 \quad (65)$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 9 \quad (64)$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 6 \quad (63)$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = 100 \quad (68)$$

$$x^{-\frac{3}{4}} = 27 \quad (67)$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \quad (66)$$

$$x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 32 \quad (71)$$

$$x \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 4 \quad (70)$$

$$x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 64 \quad (69)$$

תשובות (חזקות עם מעריך רציונאלי (שבר)):

- (1) 4 (2) 3 (3) 16 (4) 81 (5) 8 (6) 64 (7) 8 (8) 128 (9) 5 (10) 11 (11) 32 (12) 9 (13)  $\frac{1}{3}$  (14)  $\frac{1}{32}$  (15)  $\frac{1}{216}$  (16)  $\frac{1}{27}$  (17)  $\frac{1}{11}$  (18)  $\frac{1}{49}$  (19)  $\frac{1}{8}$  (20)  $\frac{1}{5}$  (21)  $\frac{8}{125}$  (22)  $\frac{3}{8}$  (23)  $\frac{2}{4}$  (24) 0.001 (25) 0.01 (26) 0.0016 (27) 0.001 (28) 0.0016 (29) 6 (30) 2 (31)  $\frac{25}{16}$  (32) 4 (33)  $\frac{1}{5}$  (34) 2 (35) 9 (36)  $\frac{1}{4}$  (37) 1 (38) 5 (39) 10 (40) 3 (41) 16 (42) 3 (43)  $\frac{1}{9}$  (44) 11 (45) 5 (46) 4 (47) -4 (48) 10 (49) 0 (50)  $\frac{1}{\sqrt[8]{a}}$  (51)  $\frac{1}{\sqrt[14]{a^5}}$  (52)  $\sqrt[3]{a}$  (53)  $\sqrt[5]{a}$  (54)  $\sqrt[3]{a}$  (55)  $\sqrt[5]{a}$  (56)  $\sqrt[3]{a}$  (57)  $\sqrt[5]{a}$  (58)  $\sqrt[3]{a}$  (59) 60 (60) 61 (61) 62 (62) 63 (63) 64 (64) 66 (65) 67 (66)  $\frac{1}{81}$  (67) 0.001 (68) 0.001 (69) 4 (70) 8 (71) 4

## משוואות מעריכיות

### משוואות מעריכיות – מציאת בסיס משותף והשוואת מעריכים

בסעיף זה נעסוק בפתרון משוואות מעריכיות. נזכיר, שוב, שלמוד נוסף זה מיועד רק ליישומים בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, בבעיות גדילה ודעיכה ובמספרים מרוכבים.

משוואה שהנעלם שלה מופיע במעריך נקראת משוואה מעריכית. במשוואה מעריכית הבסיסים חייבים להיות חיוביים. כדי לפתור משוואה מעריכית צריך להגיע ממנה למשוואה רגילה ממעלה ראשונה או שנייה. עושים זאת ע"י הבעת כל הבסיסים שבמשוואה בעזרת בסיס אחד. בדוגמא הראשונה שנביא נראה שהשלב הבא הוא השוואת המעריכים.

דוגמא א':

$$9^{2x-1} = 27^x \quad \text{פתור את המשוואה}$$



המשוואה זו נעבור לבסיס משותף בשני האגפים. הבסיס הנוח ביותר במקרה  
נקבל  $(3^2)^{2x-1} = (3^3)^x$ , לכן  $3^{4x-2} = 3^{3x}$ . אם הבסיסים שווים וקיים  
שוויון אז גם המעריכים שווים, לכן  $4x-2 = 3x$  והפתרון  $x = 2$ .

### משוואות מעריכיות - חיבור וחסור בסיסים

כאשר נעביר דוגמאות שבהן יש פעולות חיבור וחסור בין הבסיסים. בדוגמא הראשונה  
(א) המשוואה שנקבל, אחרי השוואת המעריכים, היא משוואה ממעלה ראשונה.  
(ב) השנייה (דוגמא ג') ניעזר במשתנה עזר ונקבל משוואה ממעלה שנייה.

$$9^x + 9^{x+1} = 30$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (\text{מימין לשמאל}) \quad \text{נוכל לרשום} \quad 9^{x+1} = 9^x \cdot 9^1 = 9^x \cdot 9$$

נציב את אגף שמאל וניעזר בפירוק לגורמים נקבל:

$$9^x + 9^{x+1} = 9^x + 9^x \cdot 9 = 9^x(1+9) = 9^x \cdot 10$$

$$9^x \cdot 10 = 30 \quad \text{נחלק ב-10 ונקבל} \quad 9^x = 3 \quad \text{ז"א} \quad 3^{2x} = 3$$

$$2x = 1 \quad \text{ומכאן} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$16^x + 4 = 65 \cdot 4^{x-1}$$

$$(4^2)^x + 4 = 65 \cdot 4^x \cdot 4^{-1} \quad \text{נקבל} \quad (4^2)^x + 4 = 65 \cdot 4^x \cdot 4^{-1}$$

$$4 \cdot 4^{2x} - 65 \cdot 4^x + 16 = 0 \quad \text{אחרי כפל פי 4 והעברת אגפים נקבל} \quad 4 \cdot 4^{2x} - 65 \cdot 4^x + 16 = 0$$

$$t = 4^x \quad \text{ונקבל את המשוואה הריבועית} \quad 4t^2 - 65t + 16 = 0 \quad \text{הפתרונות של}$$

$$4^x = 16 \quad \text{לפתרון הראשון נקבל} \quad t_1 = 16, \quad t_2 = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = 2, \quad \text{לפתרון השני נקבל} \quad 4^x = \frac{1}{4} \quad \text{לכן} \quad x_2 = -1$$

פתרונות המשוואה המעריכית הם  $x_1 = 2$  ו- $x_2 = -1$ .

### הערה:

ניתן לפתור משוואה מעריכית מהצורה  $a^x = b$  גם בעזרת מחשבון (שים לב שעפ"י  
הגדרת הלוגריתם מתקיים  $x = \log_a b$ ). עושים זאת בעזרת המקש שעליו כתוב  $\log$  או

$$x = \frac{\ln b}{\ln a} \quad \text{או} \quad x = \frac{\log b}{\log a} \quad \text{הפתרון של משוואה כזו הוא}$$

$$x = \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln 8} = -\frac{2}{3} \quad \text{אם המשוואה היא} \quad 8^x = \frac{1}{4} \quad \text{אז הפתרון הוא}$$



## תרגילים (משוואות מעריכיות)

משוואות מעריכיות – מציאת בסיס משותף והשוואת מעריכים

פתור את המשוואות הבאות: (מציאת בסיס משותף והשוואת מעריכים)

$$4^{x+2} = 32 \quad (2)$$

$$49^{2x-3} = 7^{-x-6} \quad (4)$$

$$25^{\frac{x}{4}-\frac{1}{4}} = 125^{x+1\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$2^{x^2-3} \cdot 4 = 8^{x+1} \quad (8)$$

$$(64 \cdot 8^x)^{\frac{2}{3}} = 8^{x^2-\frac{1}{3}} \quad (10)$$

$$(25 \cdot 5^x)^4 = 5^{\frac{4}{2x+3}} \quad (12)$$

$$3^{x-5} = 9 \quad (1)$$

$$81^{1-x} = 243 \quad (3)$$

$$27^{x-\frac{1}{2}} = 81^{\frac{x}{2}-1} \quad (5)$$

$$5^{x^2-x} = 25^{x+2} \quad (7)$$

$$(3^{x^2} \cdot 9)^2 = 27^{x+2} \quad (9)$$

$$(3^x \cdot 9)^2 = 27^{\frac{2}{x}} \quad (11)$$

פתור את המשוואות הבאות: (הבסיסים כוללים שברים)

$$5^x = \left(\frac{1}{125}\right)^{x+2} \quad (14)$$

$$100^{3x-1} = 0.001^{\frac{2}{3}x-2} \quad (16)$$

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{x}{2}-1} = 3 \cdot 9^{2x+\frac{1}{2}} \quad (18)$$

$$\left(\frac{16}{81}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-5} \quad (20)$$

$$0.5^{x-2} = \left(\frac{1}{4^{x-3}}\right)^{\frac{4}{x}} \quad (22)$$

$$3^{x+4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} \quad (13)$$

$$64^{2x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} \quad (15)$$

$$4 \cdot 2^{3x+1} = 0.25^{\frac{1}{2}x} \quad (17)$$

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2-3} = \left(\frac{125}{27}\right)^{2-x} \quad (19)$$

$$\frac{8}{2^x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2+1} = \frac{1}{16} \quad (21)$$

פתור את המשוואות הבאות: (הבסיסים כוללים שורשים)

$$(\sqrt[3]{4})^x = \sqrt[6]{0.125} \quad (24)$$

$$x^{-3}\sqrt[3]{16} = 64^2 \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad (26)$$

$$(5^{x^2+4})^{\frac{1}{x}} = \frac{25^x}{125} \quad (28)$$

$$5^x \cdot \frac{1}{125^{\sqrt{x}}} = 25^5 \quad (30)$$

$$(\sqrt[3]{2})^x = 8 \quad (23)$$

$$3^{x^2+3x} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} = 9\sqrt{3} \quad (25)$$

$$3^{\sqrt{x}} \cdot 9^{\frac{2}{3}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \quad (27)$$

$$2^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^x}} = (\sqrt{8})^{-\sqrt{x}+2} \quad (29)$$



## משוואות מעריכיות – חיבור וחיסור בסיסים

פתור את המשוואות הבאות: (חיבור וחיסור בין הבסיסים, מעלה ראשונה)

$$9^{x+1} + 9^{x+2} = 30 \quad (32)$$

$$8 \cdot 4^x - 3 \cdot 4^x = 40 \quad (31)$$

$$3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{x-1} = 425 \quad (34)$$

$$2^{x-3} - 2^{x-5} = 48 \quad (33)$$

$$81^{x-\frac{3}{4}} + 81^{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \quad (36)$$

$$4^{x-\frac{1}{2}} = 20 - 4^{x-\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$3 \cdot 5^{-x} - 12 \cdot 5^{-x-1} = 75 \quad (38)$$

$$2^{1-x} + 2^{-x} = 12 \quad (37)$$

$$25^{x+1} + 5^{2x+3} = 30 \quad (40)$$

$$7^{-x+1} - 6 \cdot 7^{-x} - 7^{-x-1} = \frac{6}{7} \quad (39)$$

$$3^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 18 \quad (42)$$

$$(\sqrt{2})^{x-1} + (\sqrt{2})^{x+1} = 24 \quad (41)$$

פתור את המשוואות הבאות: (חיבור וחיסור בין הבסיסים, מעלה שנייה)

$$2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad (44)$$

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad (43)$$

$$8^x(16 \cdot 8^x - 65) + 4 = 0 \quad (46)$$

$$9^x(3 \cdot 9^x - 82) + 27 = 0 \quad (45)$$

$$9^{x-1} + 3^{x-3} = 82 \quad (48)$$

$$9^{x+1} - 10 \cdot 3^x + 1 = 0 \quad (47)$$

$$3^{x^2} - 9 \cdot 3^{-x^2} = 8 \quad (50)$$

$$2^{x^2} + 2^{-x^2} = 2.5 \quad (49)$$

$$64^x + 4 = 65 \cdot 8^{x-\frac{2}{3}} \quad (52)$$

$$2 \cdot 25^x - 15 \cdot 25^{\frac{1}{2}x-1} = 1235 \quad (51)$$

$$4^x + 8 \cdot 4^{-x} = 6 \quad (54)$$

$$2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 3 \quad (53)$$

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 4^{1-x} = 15 \quad (56)$$

$$2^{x+1} + 2^{2-x} = 9 \quad (55)$$

$$36^{x+\frac{1}{2}} - 6^{x+1} = 6^x - 1 \quad (58)$$

$$2^x(2^{x+2} - 2^3) = 25 \cdot 2^x - 8 \quad (57)$$

השבות (משוואות מעריכיות):

- 4, -1 (8)   4, -1 (7)   -2 (6)    $-2\frac{1}{2}$  (5)   0 (4)    $-\frac{1}{4}$  (3)    $\frac{1}{2}$  (2)   7 (1)  
 $\frac{3}{5}$  (15)    $-\frac{3}{2}$  (14)   -2 (13)    $-2\frac{1}{2}$ , -1 (12)   -3, 1 (11)   -1,  $1\frac{2}{3}$  (10)    $-\frac{1}{2}$ , 2 (9)  
 $-\frac{3}{4}$  (24)   9 (23)   4, 6 (22)    $-\frac{5}{4}$ , 1 (21)   -5, 1 (20)    $\frac{1}{3}$  (18)    $-\frac{3}{4}$  (17)   1 (16)  
 $-\frac{1}{2}$  (32)    $\frac{3}{2}$  (31)   25 (30)   9, 4 (29)   4, -1 (28)   4 (27)   5, 4 (26)   -4, 1 (25)  
 $2\frac{1}{2}$  (42)   7 (41)    $-\frac{1}{2}$  (40)   0 (39)   -2 (37)    $\frac{1}{4}$  (36)    $2\frac{1}{2}$  (35)   3 (34)   9 (33)  
 $-\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$  (50)   -1, 1 (49)   3 (48)    $-\frac{4}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  (46)    $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$  (45)   -1, 2 (44)   1, 0 (43)  
 -1, 0 (58)   -2, 3 (57)    $\frac{3}{2}$  (56)    $\frac{1}{2}$ , 1 (54)   1, 0 (53)    $-\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{3}$  (52)   2 (51)